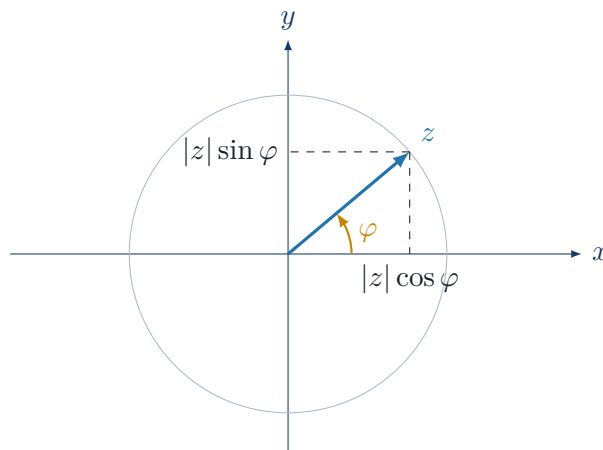


TELECOMUNICAZIONI

Strumenti matematici per l'alternata e numeri complessi

Lezione 1 – Classe 4 TELA

Prof. Claudio Gratton



1 Perché ci serve questa matematica

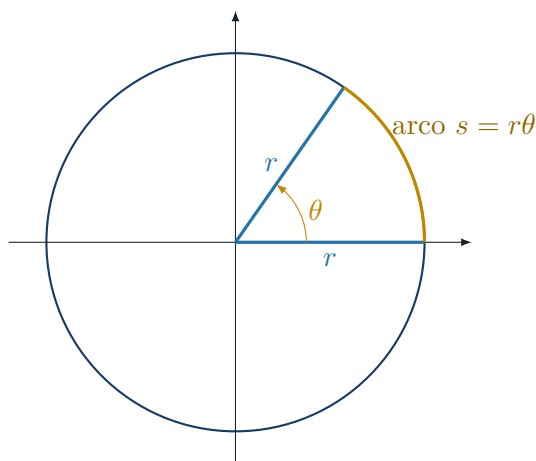
Nei circuiti in continua una tensione è spesso descritta da un solo numero. In alternata la stessa grandezza cambia continuamente: per descriverla occorrono almeno **ampiezza**, **velocità di oscillazione** e **posizione nel ciclo**. La matematica di questa lezione serve a costruire questi strumenti uno alla volta, prima di usarli nei circuiti.

Percorso della lezione

Partiremo dal cerchio e dagli angoli; da lì ricaveremo seno e coseno, poi le sinusoidi nel tempo. Solo quando modulo e fase saranno chiari introdurremo i numeri complessi. La calcolatrice verrà usata alla fine, come strumento per eseguire e controllare operazioni già comprese.

2 Angoli: gradi, radianti e verso

Un angolo misura una rotazione. Per convenzione le rotazioni antiorarie sono positive e quelle orarie negative. I gradi dividono un giro in 360 parti. Il radiante collega invece l'angolo alla lunghezza dell'arco di una circonferenza.



Se l'arco è lungo quanto il raggio, l'angolo vale 1 radiante. Perciò un giro completo, il cui arco misura $2\pi r$, vale 2π radianti.

Formula fondamentale

$$\begin{aligned} 360^\circ &= 2\pi \text{ rad}, & 180^\circ &= \pi \text{ rad}, \\ \theta_{\text{rad}} &= \theta_{\circ} \frac{\pi}{180}, & \theta_{\circ} &= \theta_{\text{rad}} \frac{180}{\pi}. \end{aligned}$$

Conversione ragionata

$$60^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad -\frac{\pi}{4} \frac{180^\circ}{\pi} = -45^\circ.$$

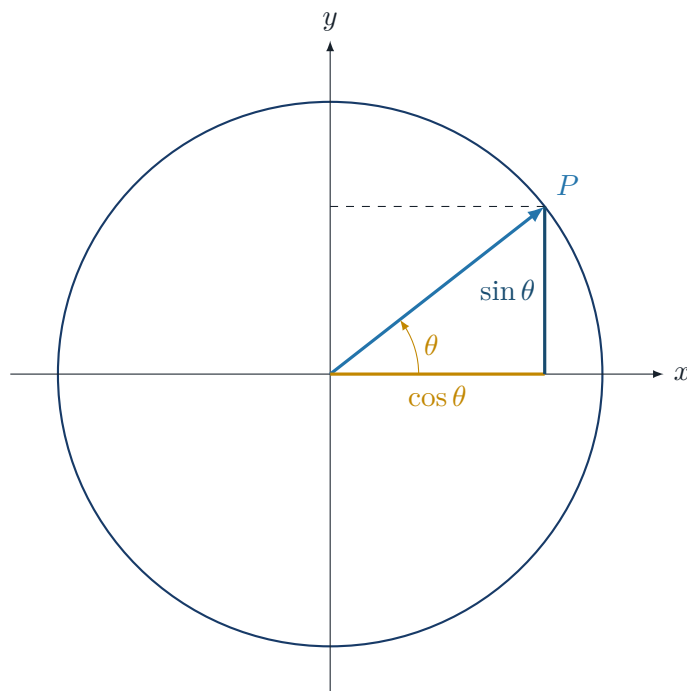
Il segno negativo indica soltanto il verso orario.

3 La circonferenza goniometrica costruisce seno e coseno

Consideriamo un cerchio di raggio 1. Ruotando di un angolo θ raggiungiamo un punto P . Le sue coordinate non sono definizioni arbitrarie:

$$P = (x, y) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Il coseno è la coordinata orizzontale; il seno è la coordinata verticale.



Poiché il raggio vale 1, il teorema di Pitagora dà immediatamente

Formula fondamentale

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

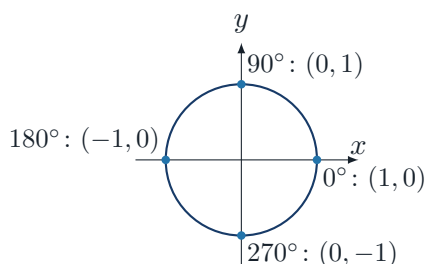
3.1 Segni nei quattro quadranti

Nel primo quadrante x e y sono positivi; nel secondo x è negativo e y positivo; nel terzo sono entrambi negativi; nel quarto x è positivo e y negativo. I segni di seno e coseno seguono quindi direttamente le coordinate del punto.

Quadrante	intervallo	$\cos \theta$	$\sin \theta$
I	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	+	+
II	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	−	+
III	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	−	−
IV	$270^\circ < \theta < 360^\circ$	+	−

4 Angoli notevoli e calcolatrice

Non serve imparare a memoria tabelle di valori. Sulla circonferenza goniometrica $x = \cos \theta$ e $y = \sin \theta$: quando il punto P cade su uno degli assi, le sue coordinate si leggono subito e con esse il coseno e il seno.



θ	0°	90°	180°	270°
$\cos \theta = x$	1	0	-1	0
$\sin \theta = y$	0	1	0	-1

Per tutti gli altri angoli si usa la calcolatrice, impostata in gradi (DEG) o in radianti (RAD) a seconda di come è dato l'angolo (la procedura completa è nella sezione 15). Il cerchio resta comunque lo strumento per **prevedere i segni**: per esempio 150° è nel secondo quadrante, quindi $\cos 150^\circ < 0$ e $\sin 150^\circ > 0$.

5 Tangente e funzione inversa

Quando $\cos \theta \neq 0$, la tangente è il rapporto tra coordinata verticale e orizzontale:

Formula fondamentale

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}.$$

La tangente descrive la pendenza della direzione individuata dall'angolo. Non è definita a $90^\circ + 180^\circ k$, perché lì $\cos \theta = 0$.

5.1 Che cos'è una funzione inversa

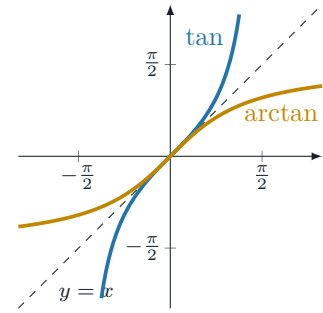
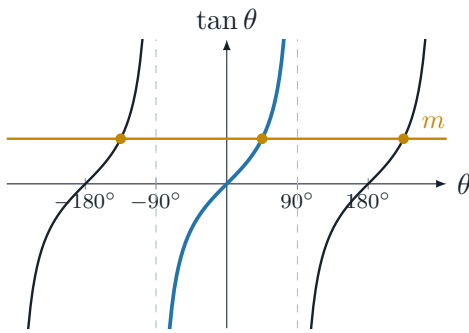
Una funzione associa a ogni valore di ingresso **un solo** valore di uscita: la tangente riceve un angolo e restituisce un numero. La **funzione inversa** fa la strada al contrario: riceve il numero e restituisce l'angolo da cui era stato ottenuto.

$$\theta \xrightarrow{\tan} m \qquad m \xrightarrow{\arctan} \theta$$

Graficamente, scambiare ingresso e uscita significa scambiare gli assi: il grafico dell'inversa è lo **specchio** del grafico della funzione rispetto alla bisettrice $y = x$.

5.2 Perché si taglia il dominio della tangente

La tangente si ripete ogni 180° : $\tan \theta = \tan(\theta + 180^\circ)$. Una retta orizzontale ad altezza m incontra quindi il grafico infinite volte (figura a sinistra): allo stesso numero m corrispondono infiniti angoli e la funzione “al contrario” non saprebbe quale restituire. Si tiene perciò **un solo tratto**, $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, in cui ogni valore compare una volta sola; specchiando questo tratto si ottiene l'arcotangente (figura a destra).

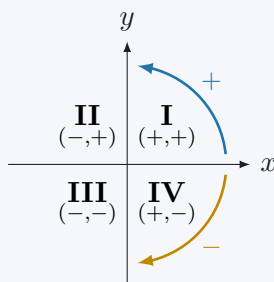


Formula fondamentale

$$\theta = \arctan m \implies -90^\circ < \theta < 90^\circ$$

L'arcotangente restituisce quindi sempre un angolo del **primo o del quarto quadrante**. Lo stesso accade con arcsin e arccos: anche seno e coseno si ripetono (per esempio $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$), quindi la calcolatrice restituisce un solo **valore principale** e il quadrante va ricostruito con le altre informazioni disponibili.

Ripasso: quadranti e verso di rotazione



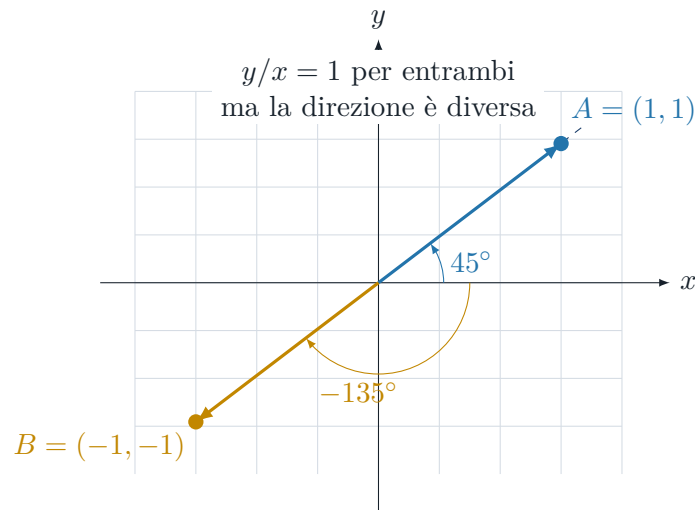
I quadranti si numerano in senso **antiorario**, a partire da quello in alto a destra (I). Gli angoli si misurano dall'asse x positivo: **positivi in senso antiorario**, negativi in senso orario. Tra parentesi i segni di (x, y) , cioè di $(\cos \theta, \sin \theta)$.

5.3 Due punti con la stessa tangente

Consideriamo $A = (1, 1)$ nel primo quadrante e $B = (-1, -1)$ nel terzo. Dalla definizione di tangente:

$$\tan \theta_A = \frac{y_A}{x_A} = \frac{1}{1} = 1, \quad \tan \theta_B = \frac{y_B}{x_B} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Nel terzo quadrante x e y sono **entrambi negativi**, quindi il loro rapporto ha lo stesso segno, e qui anche lo stesso valore, del primo quadrante. La sola $\arctan(1) = 45^\circ$ restituisce l'angolo di A , perché l'arcotangente dà solo angoli tra -90° e 90° ; B indica invece la direzione opposta.



Per ottenere l'angolo giusto ci sono due strade.

5.4 Metodo 1: la funzione atan2

Perché serve atan2

L'espressione $\arctan(y/x)$ riceve un solo numero: il rapporto. Perciò perde i segni originali di x e y e non può distinguere punti opposti. La funzione $\text{atan2}(y, x)$ riceve invece **due argomenti separati**, prima y e poi x : usa i loro segni per scegliere il quadrante e funziona anche quando $x = 0$.

Stesso rapporto, quadrante diverso

$$\text{atan2}(1, 1) = 45^\circ, \quad \text{atan2}(-1, -1) = -135^\circ (= 225^\circ).$$

Sulle calcolatrici con modalità complessa, il comando $\arg(x + jy)$ svolge lo stesso compito di $\text{atan2}(y, x)$.

5.5 Metodo 2: a mano, con la normale arcotangente

Calcoliamo prima l'angolo di riferimento, usando il rapporto **senza segno**:

$$\alpha = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ,$$

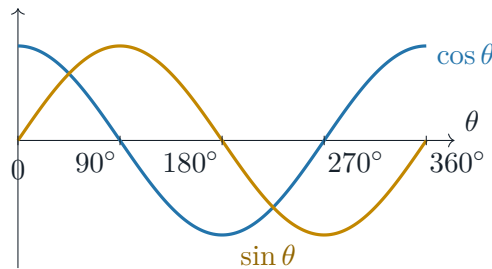
poi lo trasportiamo nel quadrante individuato dai segni di x e y :

segno di x	segno di y	quadrante	angolo θ
+	+	I	α
-	+	II	$180^\circ - \alpha$
-	-	III	$-180^\circ + \alpha$ oppure $180^\circ + \alpha$
+	-	IV	$-\alpha$

Per il punto $B = (-1, -1)$: $\alpha = \arctan|-1/-1| = \arctan 1 = 45^\circ$; $x < 0$ e $y < 0$, quindi terzo quadrante e $\theta_B = -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$, come con atan2 . In forma polare useremo normalmente l'intervallo $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$.

6 Dal cerchio alla sinusoide

Se il punto sulla circonferenza ruota con velocità costante, la sua coordinata orizzontale varia come un coseno e quella verticale come un seno. Svolgendo il moto nel tempo si ottengono le due onde.



Si osserva che

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ).$$

Il seno è quindi un coseno traslato di 90° . Nel corso useremo il coseno come convenzione unica.

7 Periodo, frequenza e pulsazione

Il **periodo** T è il tempo necessario per un ciclo e si misura in secondi. La **frequenza** f conta i cicli al secondo e si misura in hertz. Sono reciproci:

$$f = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{1}{f}.$$

In ogni ciclo l'angolo aumenta di 2π rad. La velocità angolare, o **pulsazione**, è

Formula fondamentale

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [\omega] = \text{rad/s}.$$

La forma generale di una sinusoide è

Formula fondamentale

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

X_m è il valore massimo; ω stabilisce quanto rapidamente si ripete l'onda; φ indica la posizione iniziale nel ciclo rispetto al riferimento scelto.

Leggere completamente una sinusoide

Per $v(t) = 12 \cos(200\pi t - 30^\circ)$ V si ha $V_m = 12$ V, $\omega = 200\pi$ rad/s e

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = 10 \text{ ms}.$$

La fase iniziale è -30° : rispetto a $12 \cos(200\pi t)$, l'onda è in ritardo di 30° .

8 Fase relativa e spostamento nel tempo

La fase acquista significato quando si confrontano sinusoidi della **stessa frequenza**:

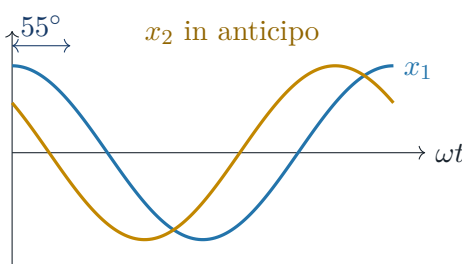
$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Lo sfasamento di x_2 rispetto a x_1 è

Formula fondamentale

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Se $\Delta\varphi > 0$, x_2 è in anticipo; se $\Delta\varphi < 0$, è in ritardo. Lo spostamento temporale equivalente è $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$, con $\Delta\varphi$ in radianti.



9 Valore massimo, picco-picco e valore efficace

Il valore massimo X_m è la distanza dal centro al picco. Il valore picco-picco è $X_{pp} = 2X_m$. Per una sinusoide, il valore efficace è

Formula fondamentale

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}, \quad X_m = \sqrt{2} X.$$

Il valore efficace produce la stessa potenza media su un resistore del corrispondente valore continuo. Per esempio 230 V di rete è efficace: $V_m \simeq 325$ V e $V_{pp} \simeq 650$ V.

10 Da dove nasce l'unità immaginaria

Nei numeri reali il quadrato di qualunque numero è non negativo. Perciò l'equazione

$$x^2 = -1$$

non ha soluzioni reali. Estendiamo allora l'insieme dei numeri introducendo l'**unità immaginaria**

Formula fondamentale

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1.$$

In elettrotecnica si usa j anziché i per non confonderla con la corrente. Le potenze si ripetono ogni quattro:

$$j^0 = 1, \quad j^1 = j, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = 1.$$

Di conseguenza, per $A \geq 0$, $\sqrt{-A} = j\sqrt{A}$.

11 Che cos'è un numero complesso

Un numero complesso è la somma di una parte reale e di una parte immaginaria:

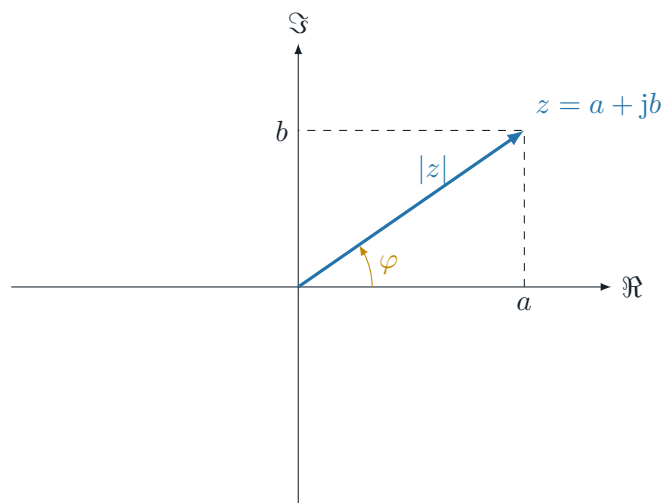
Formula fondamentale

$$z = a + jb, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$a = \Re(z)$ è la parte reale e $b = \Im(z)$ è il coefficiente della parte immaginaria. Due numeri complessi sono uguali solo se coincidono entrambe le componenti:

$$a + jb = c + jd \iff a = c \text{ e } b = d.$$

Geometricamente z è il punto (a, b) , oppure il vettore dall'origine a quel punto, nel piano complesso: asse reale orizzontale e asse immaginario verticale.



Il modulo deriva da Pitagora e l'argomento dalla direzione del vettore:

Formula fondamentale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{atan2}(b, a).$$

12 Forma cartesiana e forma polare

$$z = a + jb = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z| \angle \varphi.$$

Dal triangolo rettangolo:

Formula fondamentale

$$a = |z| \cos \varphi, \quad b = |z| \sin \varphi.$$

Da cartesiana a polare, con quadrante

Sia $z = -3 + j4$. Allora $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. Il punto è nel secondo quadrante:

$$\varphi = \text{atan2}(4, -3) = 126,87^\circ, \quad \boxed{z = 5 \angle 126,87^\circ}.$$

Il valore $\arctan(4/-3) = -53,13^\circ$ sarebbe la direzione opposta e va corretto di 180° .

Conversione nelle due direzioni

Cartesiana $\rightarrow$ **polare**: da (a, b) calcoliamo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\varphi = \text{atan2}(b, a)$.

Polare $\rightarrow$ **cartesiana**: da $(|z|, \varphi)$ calcoliamo $a = |z| \cos \varphi$ e $b = |z| \sin \varphi$.

Non sono due numeri diversi: sono due descrizioni dello stesso punto.

Da polare a cartesiana

Per $z = 10 \angle (-30^\circ)$:

$$a = 10 \cos(-30^\circ) = 8,66, \quad b = 10 \sin(-30^\circ) = -5,$$

$$\boxed{z = 8,66 - j5}.$$

Il segno di b è coerente con il quarto quadrante.

13 Operazioni: scegliere la forma giusta

In cartesiana si sommano e si sottraggono separatamente le componenti:

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d).$$

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d).$$

Per moltiplicare in cartesiana si applica la proprietà distributiva e poi si usa $j^2 = -1$:

Formula fondamentale

$$\boxed{(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)}.$$

Per esempio

$$(2 + j3)(4 - j1) = 8 - j2 + j12 - j^2 3 = \boxed{11 + j10}.$$

In polare, prodotto e divisione diventano geometricamente semplici:

Formula fondamentale

$$\boxed{(A \angle \alpha)(B \angle \beta) = AB \angle (\alpha + \beta)},$$

$$\boxed{\frac{A \angle \alpha}{B \angle \beta} = \frac{A}{B} \angle (\alpha - \beta)}.$$

Moltiplicare significa scalare il modulo e ruotare l'angolo; dividere significa dividere i moduli e sottrarre gli angoli.

Quale forma conviene usare?

Somma e sottrazione: forma cartesiana, perché si combinano le componenti.

Prodotto e divisione: forma polare, perché si combinano moduli e angoli.

Non si sommano direttamente né i moduli né gli angoli di due numeri complessi.

13.1 Coniugato e divisione in cartesiana

Il coniugato di $z = a + jb$ è $z^* = a - jb$. Il prodotto $zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2$ è reale. Per questo il coniugato elimina la parte immaginaria dal denominatore.

Divisione senza salto algebrico

$$\frac{4 + j3}{2 - j1} = \frac{(4 + j3)(2 + j1)}{(2 - j1)(2 + j1)}.$$

$$(4 + j3)(2 + j1) = 8 + j4 + j6 - 3 = 5 + j10,$$

$$(2 - j1)(2 + j1) = 4 + 1 = 5,$$

$$\boxed{\frac{4 + j3}{2 - j1} = 1 + j2}.$$

14 Potenze di dieci, prefissi e unità

prefisso	simbolo	fattore	prefisso	simbolo	fattore
giga	G	10^9	milli	m	10^{-3}
mega	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
kilo	k	10^3	nano	n	10^{-9}

Unità e ordine di grandezza

Con $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ e $C = 220 \text{ nF}$:

$$R = 4,7 \cdot 10^3 \Omega, \quad C = 220 \cdot 10^{-9} \text{ F},$$

$$RC = (4,7 \cdot 10^3)(220 \cdot 10^{-9}) \text{ s} = 1,034 \text{ ms}.$$

Il risultato è plausibile: kilo per nano produce micro, con il fattore numerico si arriva a circa un millisecondo.

15 Solo ora: impostare e controllare la calcolatrice**Procedura operativa**

1. scegliere **DEG** per angoli in gradi e **RAD** per radianti;
2. usare **CMPLX/COMP** per i numeri complessi;
3. scegliere l'uscita cartesiana $a + bi$ o polare $r\angle\theta$ in base all'operazione;
4. usare parentesi attorno a numeratore, denominatore e angoli negativi;
5. usare **EXP** o $\times 10^x$ per la notazione scientifica;
6. confrontare segni, quadrante e ordine di grandezza con la previsione manuale.

Controllo	Prova	Risultato atteso
DEG	$\sin 30$	0,5
RAD	$\sin(\pi/6)$	0,5
quadrante	$\text{atan2}(4, -3)$	$126,87^\circ$
modulo	$ -3 + 4j $	5
conversione	$10\angle(-30^\circ)$	$8,66 - j5$

16 Esempio integrato: dal segnale al numero complesso

Sia $v(t) = 325 \sin(314t + 30^\circ)$ V.

1. Convenzione al coseno.

$$v(t) = 325 \cos(314t - 60^\circ) \text{ V.}$$

2. Frequenza e periodo.

$$f = \frac{314}{2\pi} \simeq 50 \text{ Hz}, \quad T \simeq 20 \text{ ms.}$$

3. Valore efficace.

$$V = \frac{325}{\sqrt{2}} \simeq 230 \text{ V.}$$

4. Rappresentazione polare e cartesiana.

$$\underline{V} = 230\angle(-60^\circ) \text{ V},$$

$$\underline{V} = 230 \cos(-60^\circ) + j230 \sin(-60^\circ) = \boxed{115 - j199,2 \text{ V}}.$$

Il segno negativo della parte immaginaria è coerente con il quarto quadrante.

Autoverifica ragionata

Prima di usare la calcolatrice, prevedere almeno segno e quadrante; poi confrontare il risultato.

1. Per 150° , indicare i segni di seno e coseno. Essendo nel secondo quadrante, $\sin 150^\circ > 0$ e $\cos 150^\circ < 0$.
2. Convertire $-3 + 3j$ in forma polare. Il punto è nel secondo quadrante: $|z| = 3\sqrt{2}$ e $\arg z = 135^\circ$.
3. Un segnale ha $f = 2 \text{ kHz}$. Allora $T = 1/f = 0,5 \text{ ms}$ e $\omega = 2\pi f \simeq 12,57 \text{ krad/s}$.
4. Se $v(t) = 10 \cos(\omega t + 20^\circ)$ e $i(t) = 2 \cos(\omega t - 35^\circ)$, la tensione anticipa la corrente di $20^\circ - (-35^\circ) = 55^\circ$.

Controllo finale della lezione

Prima di procedere bisogna saper ricostruire seno e coseno dal cerchio, scegliere il quadrante, distinguere gradi e radianti, leggere una sinusoide, confrontare fasi relative, distinguere picco ed efficace, passare tra forma cartesiana e polare e spiegare geometricamente prodotto e divisione.