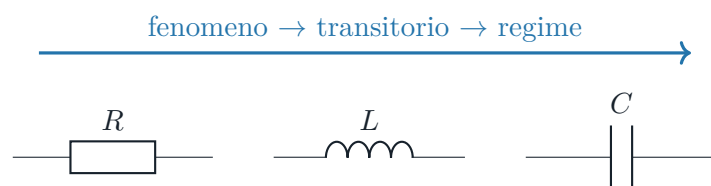


TELECOMUNICAZIONI

Resistore, induttore e condensatore dal transitorio al regime sinusoidale

Lezione 2 – Classe 4 TELA

Prof. Claudio Gratton



1 La domanda guida: che cosa fa davvero un componente?

Dire che un componente vale R , L o C non basta. Dobbiamo capire quale grandezza può cambiare istantaneamente, dove finisce l'energia e come il comportamento dipende dal tempo e dalla frequenza.

Due situazioni da distinguere

Transitorio: intervallo successivo a una commutazione, durante il quale tensioni e correnti si assestano.

Regime: comportamento dopo che il transitorio è terminato. Il regime può essere continuo oppure sinusoidale permanente.

Per tutta la parte sinusoidale useremo il coseno, valori efficaci e una frequenza già fissata:

$$\omega = 2\pi f.$$

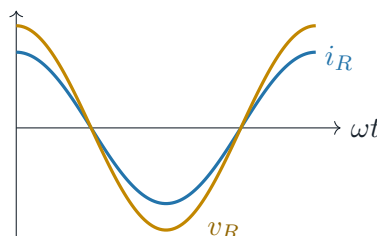
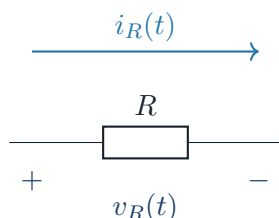
2 Il resistore: trasformazione irreversibile dell'energia

Nel resistore tensione e corrente sono legate istante per istante dalla legge di Ohm:

Formula fondamentale

$$v_R(t) = R i_R(t).$$

Se la corrente raddoppia, la tensione raddoppia nello stesso istante. Il resistore non conserva energia per restituirla in seguito: la trasforma in calore.



Le due sinusoidi attraversano lo zero e raggiungono i massimi nello stesso momento: sono in fase. Con valori efficaci:

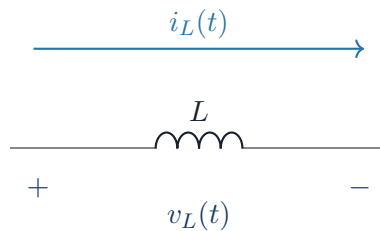
Formula fondamentale

$$V_R = R I_R, \quad \Delta\varphi_R = 0^\circ,$$

$$P = V_R I_R = I_R^2 R = \frac{V_R^2}{R}.$$

3 L'induttore: energia nel campo magnetico

Una corrente nell'avvolgimento crea un campo magnetico. Se la corrente cambia, cambia anche il campo e compare una tensione che si oppone alla variazione. L'induttanza L si misura in henry (H).



Senza usare derivate, leggiamo la legge fisica con una variazione finita:

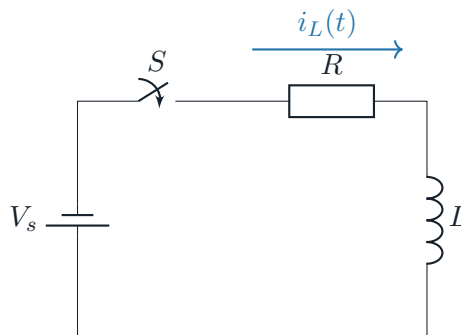
Formula fondamentale

$$v_L \approx L \frac{\Delta i_L}{\Delta t}.$$

Una variazione di corrente più rapida richiede una tensione maggiore. Ne segue una proprietà fondamentale: **la corrente in un induttore non può saltare istantaneamente**. Un salto richiederebbe $\Delta t = 0$ e quindi una tensione infinita.

3.1 Accensione di un circuito RL

Consideriamo una sorgente continua collegata a R e L mediante un interruttore.



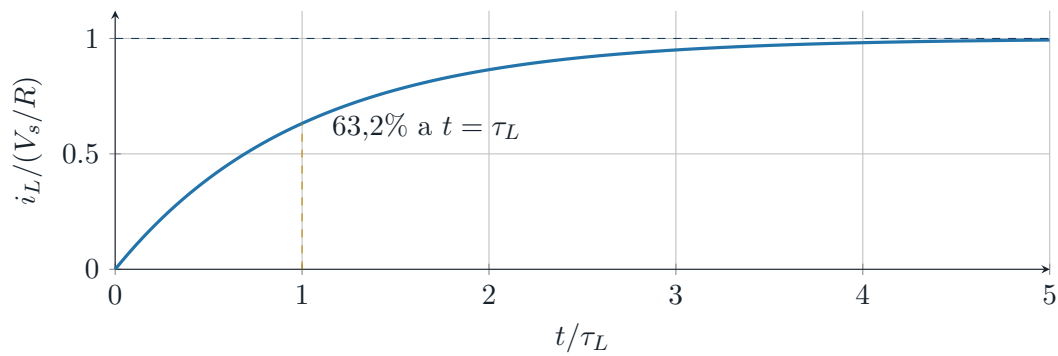
Prima della chiusura $i_L = 0$. Subito dopo, la corrente è ancora zero: inizialmente l'induttore contrasta la variazione. Poi la corrente cresce gradualmente verso il valore finale V_s/R . La costante di tempo del circuito è

$$\tau_L = \frac{L}{R}.$$

Per l'accensione:

Formula fondamentale

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right).$$

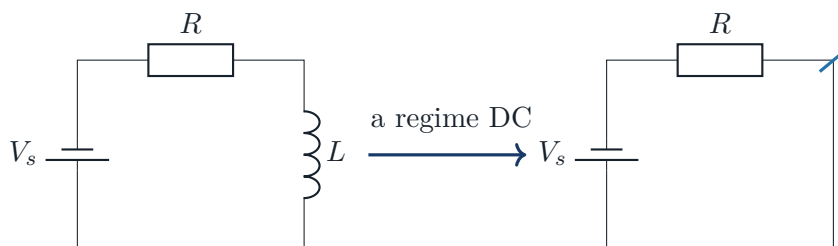


Dopo circa $5\tau_L$ la corrente è praticamente al valore finale. Se la sorgente viene rimossa ma si lascia un percorso chiuso, l'energia del campo mantiene la corrente, che decade come

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau_L}.$$

3.2 Che cosa diventa l'induttore in continua

All'inizio l'induttore si oppone alla crescita della corrente. A regime continuo la corrente è costante, quindi $\Delta i_L = 0$ e la tensione sull'induttore ideale è nulla.



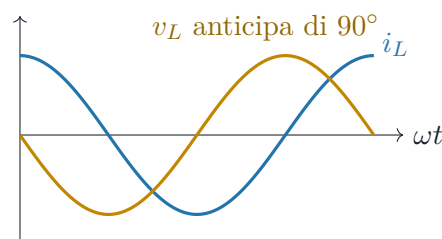
l'induttore ideale è un cortocircuito

Energia nel campo magnetico

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2.$$

4 L'induttore in regime sinusoidale

Con una corrente sinusoidale la variazione è massima quando la corrente attraversa lo zero e nulla quando la corrente è al massimo. La tensione è quindi anticipata di 90° rispetto alla corrente.



La reattanza induttiva misura l'opposizione sinusoidale:

Formula fondamentale

$$\boxed{X_L = \omega L = 2\pi f L}, \quad \boxed{V_L = X_L I_L}, \quad \boxed{\Delta\varphi_L = +90^\circ}.$$

Se la frequenza raddoppia, X_L raddoppia: l'induttore lascia passare facilmente la continua ma ostacola sempre di più le variazioni rapide.

Induttore a una frequenza assegnata

Con $L = 20 \text{ mH}$, $f = 50 \text{ Hz}$ e $I = 2 \text{ A}$:

$$\omega = 2\pi 50 = 314,16 \text{ rad/s},$$

$$X_L = \omega L = 314,16 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 6,28 \Omega,$$

$$V_L = X_L I = 6,28 \cdot 2 = \boxed{12,56 \text{ V}}.$$

La tensione anticipa la corrente di 90° .

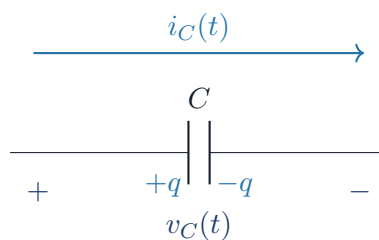
5 Il condensatore: carica ed energia nel campo elettrico

Il condensatore possiede due armature separate da un isolante. Una tensione sposta carica da un'armatura all'altra e crea un campo elettrico. La capacità C si misura in farad (F):

Formula fondamentale

$$\boxed{q = C v_C}.$$

La relazione significa che, a parità di tensione, una capacità maggiore immagazzina più carica.



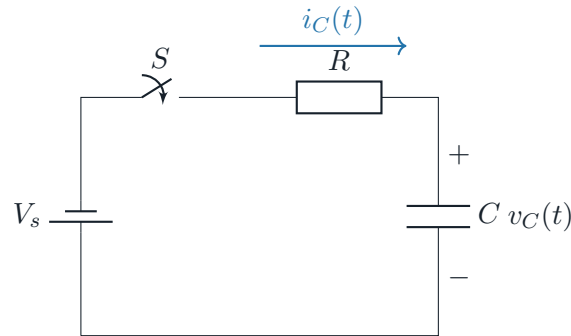
Per accumulare rapidamente carica serve una corrente maggiore:

Formula fondamentale

$$\boxed{i_C \approx C \frac{\Delta v_C}{\Delta t}}.$$

Ne segue che **la tensione su un condensatore non può saltare istantaneamente**: un salto richiederebbe corrente infinita.

5.1 Carica di un circuito RC



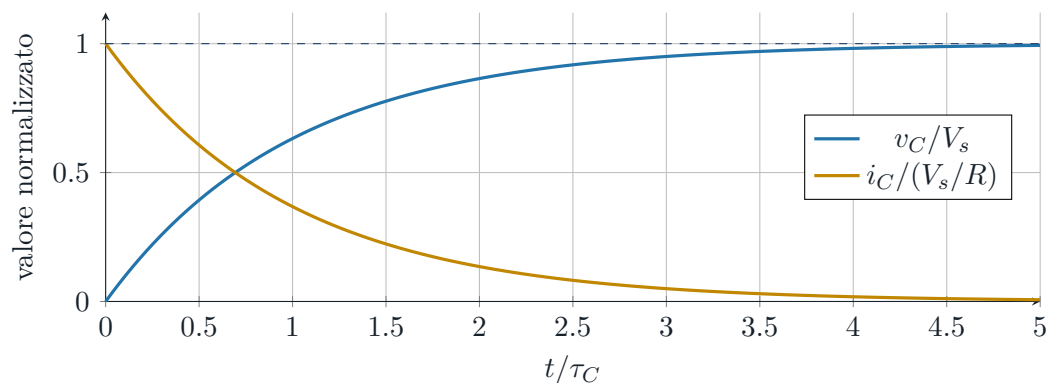
Se il condensatore è inizialmente scarico, subito dopo la chiusura $v_C = 0$: inizialmente si comporta come un collegamento che accetta corrente. Mentre accumula carica, v_C cresce e la corrente diminuisce. La costante di tempo è

$$\tau_C = RC.$$

Per la carica:

Formula fondamentale

$$v_C(t) = V_s \left(1 - e^{-t/\tau_C}\right), \quad i_C(t) = \frac{V_s}{R} e^{-t/\tau_C}.$$

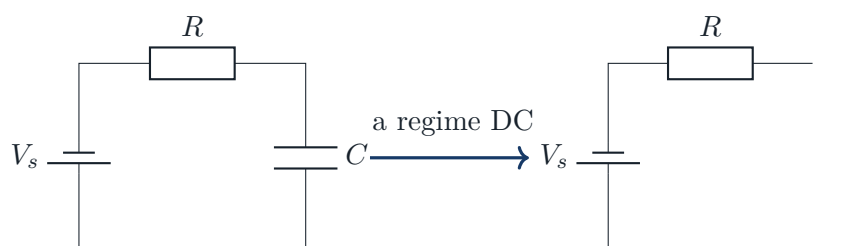


Durante la scarica attraverso R , tensione e corrente decadono esponenzialmente:

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau_C}.$$

5.2 Che cosa diventa il condensatore in continua

A regime continuo v_C è costante, quindi $\Delta v_C = 0$ e non circola corrente nel condensatore ideale.



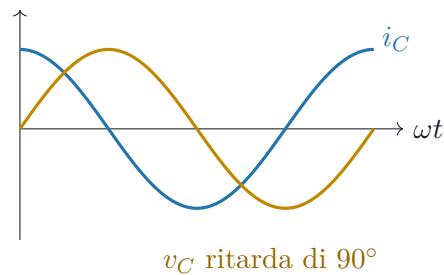
il condensatore ideale è un circuito aperto

Energia nel campo elettrico

$$W_C = \frac{1}{2} C v_C^2.$$

6 Il condensatore in regime sinusoidale

La corrente è massima quando la tensione cambia più rapidamente e nulla ai massimi della tensione. Perciò la corrente anticipa la tensione di 90° , oppure la tensione ritarda la corrente di 90° .



La reattanza capacitiva è

Formula fondamentale

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}, \quad V_C = X_C I_C, \quad \Delta\varphi_C = -90^\circ.$$

Se la frequenza raddoppia, X_C si dimezza: il condensatore blocca la continua a regime ma lascia passare sempre più facilmente le variazioni rapide.

Condensatore a una frequenza assegnata

Con $C = 100 \mu\text{F}$, $f = 50 \text{ Hz}$ e $V_C = 20 \text{ V}$:

$$\omega = 314,16 \text{ rad/s},$$

$$X_C = \frac{1}{314,16 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31,83 \Omega,$$

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{20}{31,83} = \boxed{0,628 \text{ A}}.$$

La corrente anticipa la tensione di 90° .

7 Prima X , poi Z : reattanza e impedenza

La lettera X indica la **reattanza**, cioè l'opposizione dovuta all'accumulo e alla restituzione di energia. X si misura in ohm come una resistenza, ma non dissipa potenza attiva ideale.

Per i singoli componenti si usano normalmente i moduli positivi

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Quando induttore e condensatore sono presenti insieme, conviene introdurre una reattanza totale con segno:

Formula fondamentale

$$X = X_L - X_C.$$

Quindi $X > 0$ significa comportamento induttivo, $X < 0$ comportamento capacitivo e $X = 0$ assenza di parte reattiva. Questa quantità da sola non contiene l'eventuale resistenza. Per raccogliere in un unico oggetto resistenza e reattanza usiamo l'**impedenza**:

Formula fondamentale

$$Z = R + jX.$$

Non è una nuova legge: è una scrittura compatta che tiene insieme la parte dissipativa R e la parte reattiva X .

Per i tre componenti ideali:

Formula fondamentale

$$Z_R = R = R\angle 0^\circ,$$

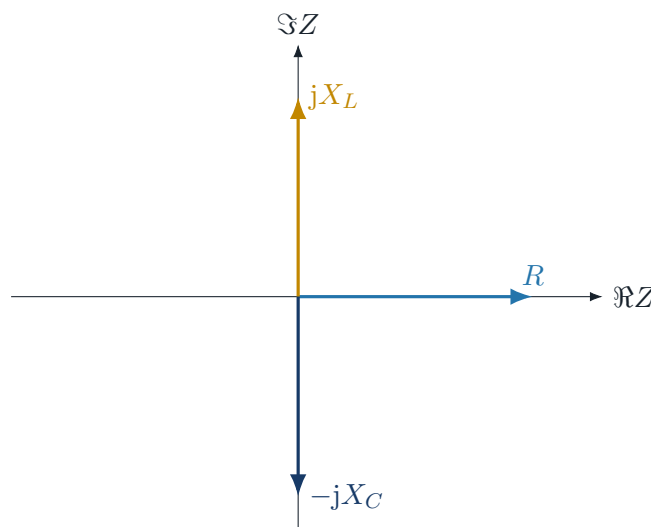
$$Z_L = j\omega L = X_L\angle 90^\circ,$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = X_C\angle(-90^\circ).$$

La relazione comune diventa

$$\underline{V} = Z\underline{I}.$$

Il modulo di Z stabilisce il rapporto V/I ; l'angolo di Z stabilisce lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente.



8 Serie RLC: calcolare prima X , poi costruire Z

In serie la corrente è la stessa. La KVL fasoriale sarà giustificata nella lezione successiva; qui usiamo il risultato per sommare le impedenze:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_C.$$

Calcoliamo prima la reattanza totale $X = X_L - X_C$; soltanto dopo scriviamo l'impedenza:

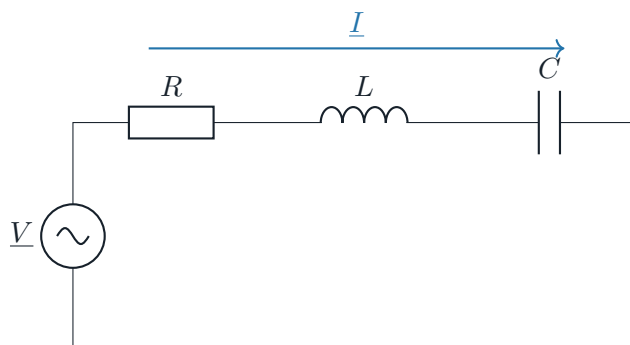
Formula fondamentale

$$X = X_L - X_C,$$

$$Z = R + jX,$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2},$$

$$\varphi_Z = \text{atan2}(X, R).$$



RLC serie, calcolo e interpretazione

Con $R = 100\ \Omega$, $L = 20\ \text{mH}$, $C = 10\ \mu\text{F}$ e $f = 1\ \text{kHz}$:

$$\omega = 2\pi \cdot 1000 = 6283\ \text{rad/s},$$

$$X_L = \omega L = 125,7\ \Omega, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 15,9\ \Omega.$$

Prima troviamo la reattanza risultante:

$$X = X_L - X_C = 125,7 - 15,9 = 109,8\ \Omega.$$

Poi la uniamo a R :

$$Z = R + jX = 100 + j109,8\ \Omega.$$

$$|Z| = 148,5\ \Omega, \quad \varphi_Z = 47,7^\circ.$$

Con $\underline{V} = 10\angle 0^\circ\ \text{V}$:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{148,5\angle 47,7^\circ} = \boxed{67,3\angle(-47,7^\circ)\ \text{mA}}.$$

Il circuito è induttivo perché $X_L > X_C$: la corrente è in ritardo.

9 Risonanza serie: vedere che cosa si cancella

Al variare della frequenza, $X_L = 2\pi fL$ cresce linearmente mentre $X_C = 1/(2\pi fC)$ diminuisce. Esiste una frequenza alla quale hanno lo stesso modulo:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Moltiplichiamo per ωC :

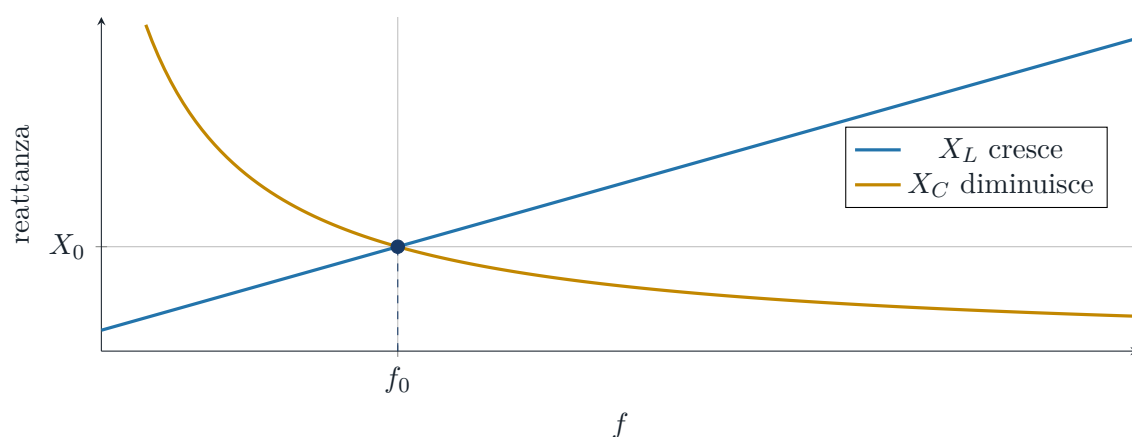
$$\omega^2 LC = 1.$$

Da cui

Formula fondamentale

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

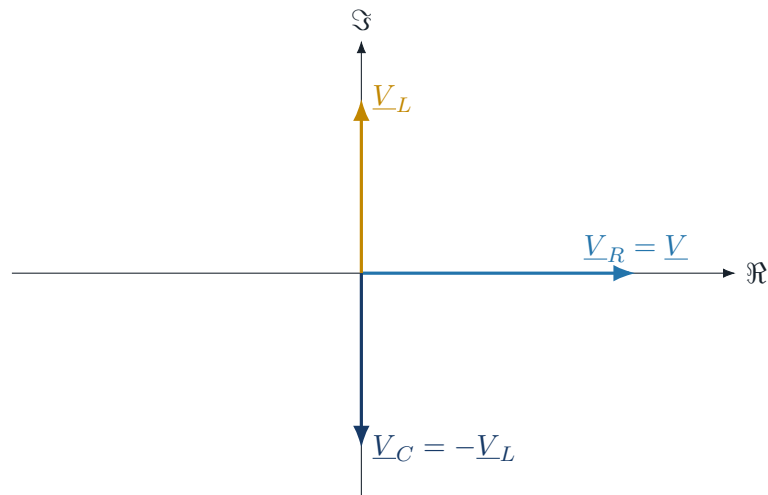
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$



Alla risonanza $X_L - X_C = 0$, quindi

$$\boxed{Z = R}, \quad \boxed{\varphi_Z = 0^\circ}, \quad \boxed{I = \frac{V}{R}}.$$

La corrente è massima ed è in fase con la tensione di alimentazione. Le tensioni su L e C sono opposte di fase: possono essere grandi singolarmente, ma la loro somma fasoriale è nulla.



Calcolo e lettura della risonanza

Con $L = 10 \text{ mH}$ e $C = 10 \mu\text{F}$:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = \boxed{503,3 \text{ Hz}}.$$

Se $R = 20 \Omega$ e $V = 10 \text{ V}$, alla risonanza

$$I = \frac{10}{20} = \boxed{0,5 \text{ A}}.$$

Sotto f_0 prevale X_C e il circuito è capacitivo; sopra f_0 prevale X_L ed è induttivo.

Controllo finale della lezione

Bisogna saper descrivere per ciascun componente il fenomeno fisico, la grandezza continua, il transitorio, il limite a regime DC, lo sfasamento sinusoidale e l'impedenza; inoltre bisogna saper spiegare la risonanza come cancellazione delle parti reattive, non soltanto ricordarne la formula.