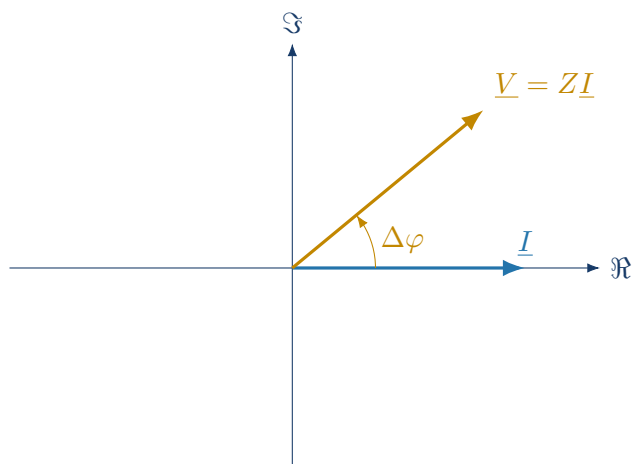


TELECOMUNICAZIONI

Fasori e metodi di risoluzione dei circuiti in alternata

Lezione 3 – Classe 4 TELA

Prof. Claudio Gratton

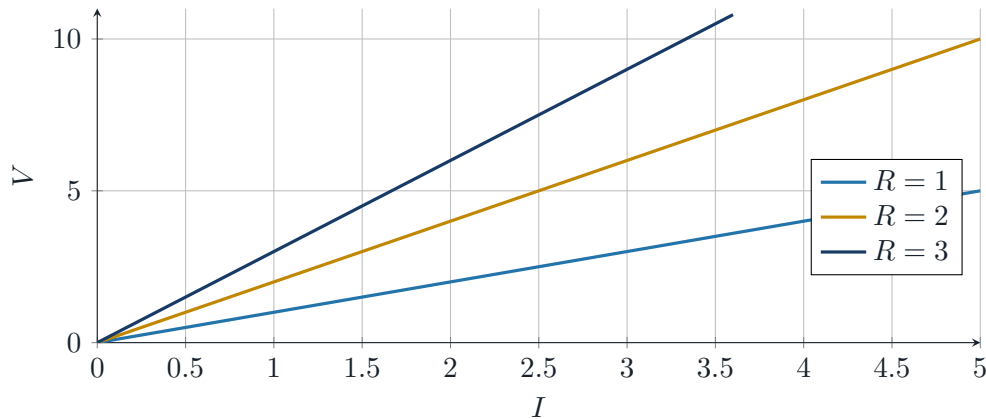


1 Prima la struttura nota: un bipolo lineare in continua

Prima di introdurre i fasori ricordiamo che cosa significa linearità nel caso più semplice. Per un resistore passivo

$$V = RI.$$

Nel piano I - V è una retta passante per l'origine. La pendenza è R : aumentando R la retta diventa più ripida.



Queste rette rappresentano tutti i possibili punti di funzionamento di resistori diversi. La proporzionalità ha due proprietà verificabili:

$$I \rightarrow kI \Rightarrow V \rightarrow kV,$$

$$R(I_1 + I_2) = RI_1 + RI_2.$$

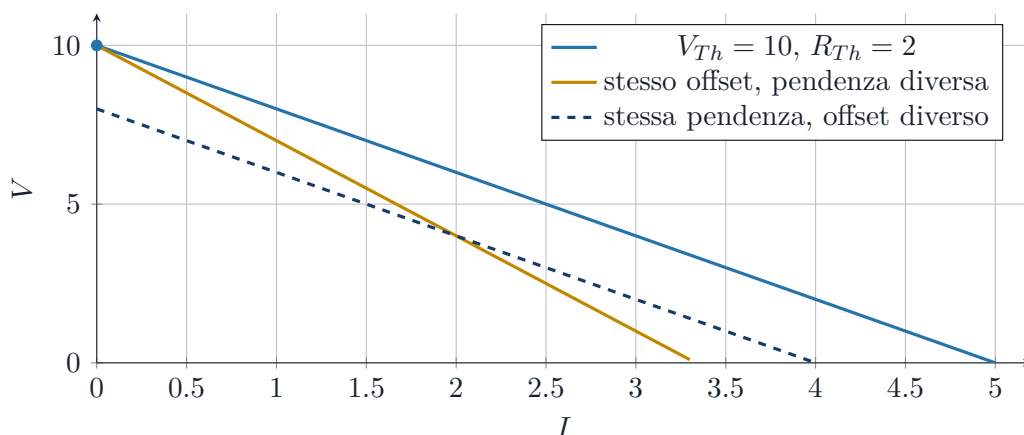
2 Da una retta passiva all'equivalente di Thévenin

Una rete lineare contenente sorgenti non deve passare per l'origine. Ai morsetti può essere descritta da

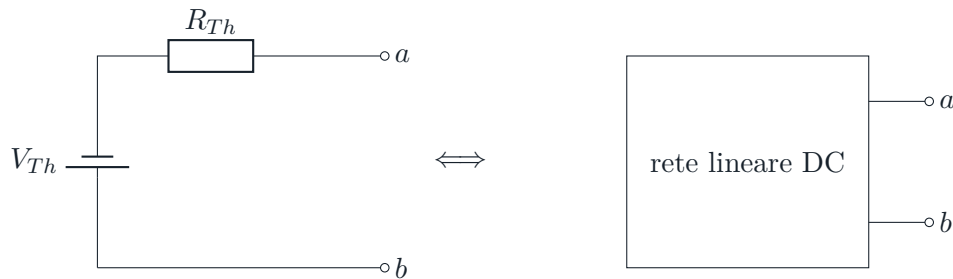
Formula fondamentale

$$V = V_{Th} - R_{Th}I.$$

V_{Th} è la tensione quando il carico è scollegato e quindi $I = 0$: è l'intercetta verticale. R_{Th} determina quanto la tensione cala quando il carico assorbe corrente: la pendenza è $-R_{Th}$.



La relazione completa è **affine**: contiene una parte proporzionale e un offset. La rete a sorgenti spente è lineare e determina la pendenza; le sorgenti attive traslano la caratteristica.



Perché iniziamo dalla DC

In alternata ritroveremo la stessa struttura: offset più pendenza. Cambierà l'oggetto matematico che contiene la pendenza, perché dovrà descrivere contemporaneamente rapporto dei moduli e sfasamento.

3 L'ipotesi che rende possibile il metodo fasoriale

Consideriamo una rete lineare in regime sinusoidale permanente alimentata a una sola frequenza. Dopo il transitorio tutte le tensioni e correnti oscillano con la stessa pulsazione imposta dalla sorgente.

Frequenza fissata e fase relativa

$$\omega = \omega_0 \quad \text{fissata per tutto il circuito}.$$

Non mettiamo nello stesso problema fasoriale grandezze di frequenza diversa. Scegliamo inoltre una grandezza come riferimento, per esempio $\underline{I} = I \angle 0^\circ$. Le altre fasi sono offset relativi:

$$\Delta\varphi = \varphi_V - \varphi_I.$$

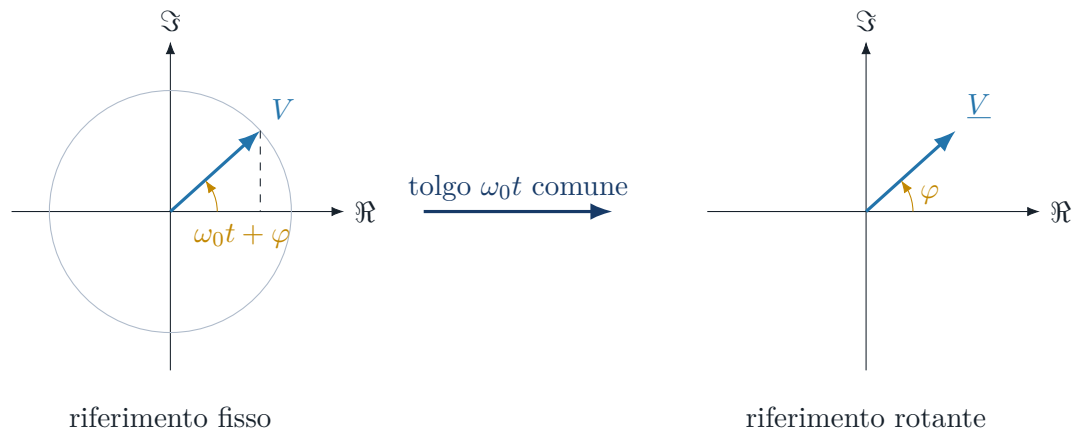
Con la convenzione al coseno e valori efficaci:

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega_0 t + \varphi_I), \quad v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega_0 t + \varphi_V).$$

La pulsazione ω_0 è comune. Per distinguere le due grandezze servono soltanto i moduli e la differenza delle fasi.

4 Dal vettore rotante al fasore fermo

Una sinusoide è la proiezione di un vettore che ruota. Nel riferimento fisso l'angolo del vettore è $\omega_0 t + \varphi$. Tutti i vettori del circuito condividono la parte $\omega_0 t$.



Il fenomeno non smette di dipendere dal tempo. Scegliamo un sistema di riferimento che ruota alla stessa velocità: la rotazione comune non compare più nei calcoli e il vettore diventa fermo.

Formula fondamentale

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega_0 t + \varphi_V) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{V} = V \angle \varphi_V.$$

5 Che cosa viene compreso geometricamente

Per una singola impedenza fissata, scegliamo la corrente come riferimento:

$$\underline{I} = I \angle 0^\circ, \quad Z = |Z| \angle \varphi_Z.$$

Allora

$$\underline{V} = Z \underline{I} = |Z| I \angle \varphi_Z.$$

Al variare di I , la fase relativa rimane costante e cambia solo il modulo. Nello spazio $(|I|, |V|, \Delta\varphi)$ i punti stanno su una semiretta contenuta nel piano $\Delta\varphi = \varphi_Z$. Guardando lungo l'asse della fase, quella coordinata costante si sovrappone e resta la relazione

Formula fondamentale

$$|V| = |Z| |I|.$$

6 Da reattanza X a impedenza Z

La reattanza X è la parte che descrive l'effetto complessivo di induttori e condensatori:

$$X = X_L - X_C.$$

È positiva per un comportamento induttivo, negativa per un comportamento capacitivo e nulla quando le due reattanze si compensano. L'impedenza non sostituisce misteriosamente X : la contiene insieme alla resistenza:

Formula fondamentale

$$Z = R + jX.$$

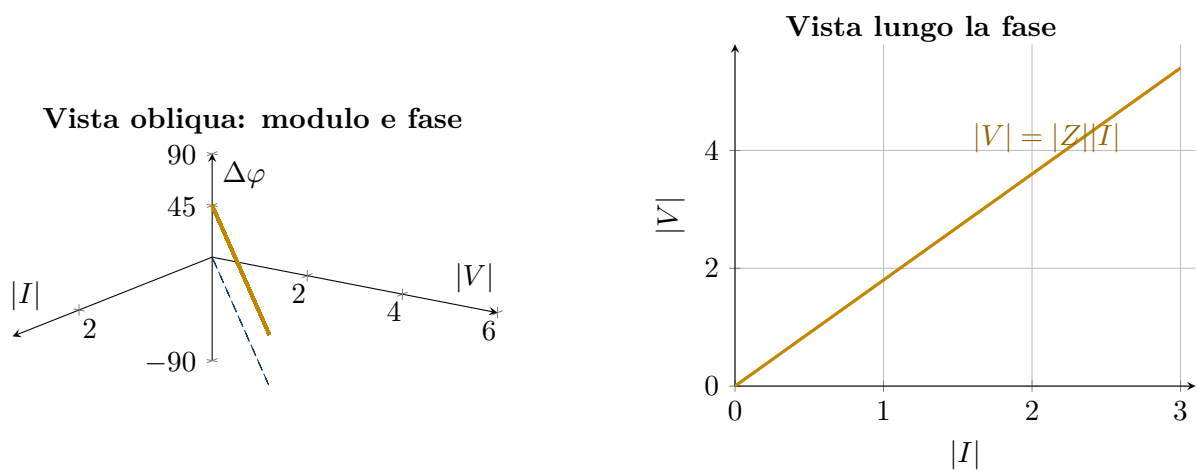


Figura 1: La vista laterale non cancella la fase: la nasconde perché, per quella impedenza e a frequenza fissata, è un offset costante.

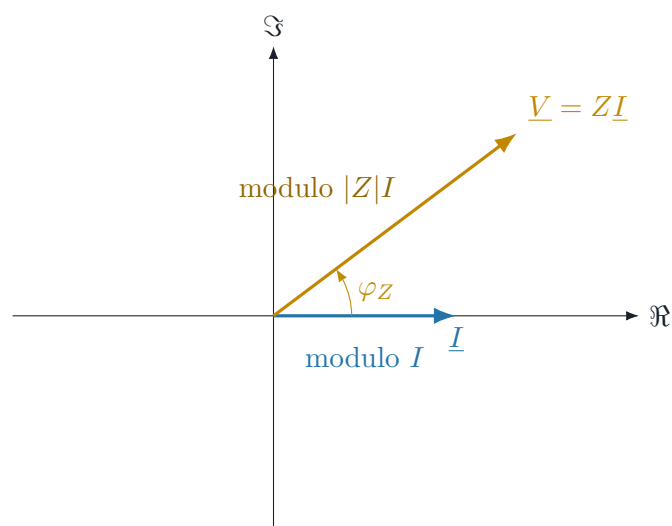
La resistenza R descrive la parte dissipativa; X descrive la parte reattiva. La scrittura Z è soltanto il modo compatto per eseguire in una sola operazione il rapporto dei moduli e lo sfasamento:

Formula fondamentale

$$|Z| = \frac{|V|}{|I|} \quad \text{rapporto dei moduli}, \quad \arg Z = \varphi_V - \varphi_I \quad \text{offset di fase}.$$

Moltiplicare per $Z = |Z|\angle\varphi_Z$ significa due operazioni successive:

1. moltiplicare il modulo per $|Z|$;
2. ruotare il vettore di φ_Z .



I casi già studiati sono quindi immediati:

$$Z_R = R, \quad Z_L = jX_L, \quad Z_C = -jX_C.$$

7 Perché KCL resta valida in forma fasoriale

La legge dei nodi deriva dalla conservazione della carica: in un nodo ideale non si accumula carica, quindi la somma istantanea delle correnti entranti uguaglia quella delle correnti uscenti.

Supponiamo che tutte le correnti abbiano la stessa ω_0 :

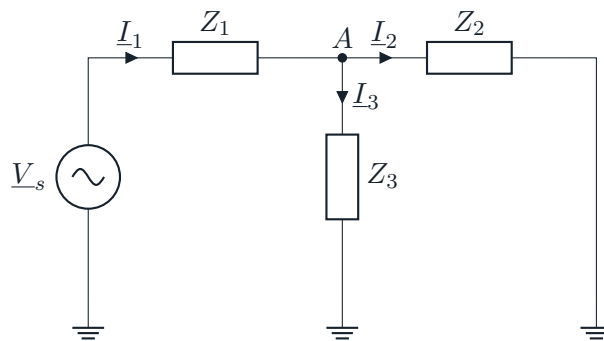
$$i_k(t) = \sqrt{2}I_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k).$$

Scrivendo ogni senoide come proiezione del proprio vettore rotante, tutte contengono lo stesso fattore di rotazione. Se la somma istantanea è nulla per ogni t , anche la somma dei vettori fermi nel riferimento rotante deve essere nulla:

Legge dei nodi in forma fasoriale

$$\sum_k \underline{I}_k = 0.$$

7.1 Applicazione senza saltare direttamente alle frazioni



1. Scegliamo i versi. $\underline{I}_1$ entra nel nodo; $\underline{I}_2$ e $\underline{I}_3$ escono.
2. Scriviamo la KCL soltanto con le correnti.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

3. Scriviamo separatamente la legge di Ohm per ogni ramo.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_A}{Z_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_A}{Z_2}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_A}{Z_3}.$$

4. Solo ora sostituiamo nella KCL.

$$\frac{\underline{V}_s - \underline{V}_A}{Z_1} = \frac{\underline{V}_A}{Z_2} + \frac{\underline{V}_A}{Z_3}.$$

5. Raccogliamo $\underline{V}_A$.

$$\frac{\underline{V}_s}{Z_1} = \underline{V}_A \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right),$$

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{V}_s / Z_1}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3}.$$

Il procedimento è identico alla DC; cambiano soltanto i coefficienti, che ora sono complessi.

8 Perché KVL resta valida in forma fasoriale

La legge delle maglie esprime la conservazione dell'energia: percorrendo una maglia chiusa, la somma istantanea degli aumenti e delle cadute di tensione è nulla. Se tutte le tensioni condividono la stessa ω_0 , si può rimuovere la rotazione comune e sommare direttamente i fasori:

Legge delle maglie in forma fasoriale

$$\sum_k \underline{V}_k = 0.$$

In una serie RLC:

$$\underline{V}_s - \underline{V}_R - \underline{V}_L - \underline{V}_C = 0.$$

Usando $\underline{V}_k = Z_k \underline{I}$:

$$\underline{V}_s = \underline{I}(Z_R + Z_L + Z_C),$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_s}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)}.$$

9 Serie, parallelo e partitori

Le strutture della DC restano valide perché derivano da KCL e KVL.

Formula fondamentale

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \cdots + \underline{Z}_n, \quad \frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\underline{Z}_n}.$$

Per due impedenze in serie:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \underline{V}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I},$$

quindi, senza saltare il passaggio intermedio,

Formula fondamentale

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_s \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

10 Sovrapposizione e trasformazione delle sorgenti

In una rete lineare, la risposta totale è la somma delle risposte prodotte da ogni sorgente indipendente considerata separatamente. Il principio continua a valere perché le equazioni fasoriali sono ancora somme e proporzioni.

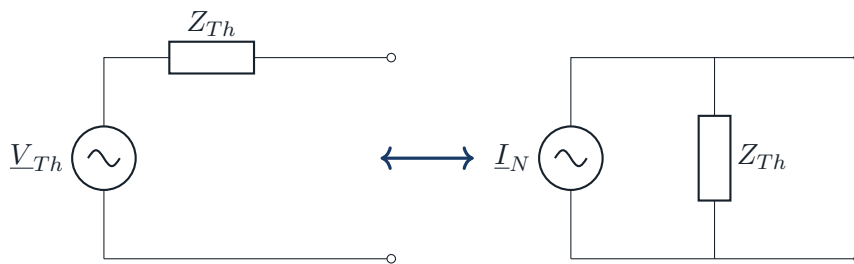
Come si spengono le sorgenti indipendenti

- generatore ideale di tensione posto a zero $\rightarrow$ cortocircuito;
- generatore ideale di corrente posto a zero $\rightarrow$ circuito aperto;
- le sorgenti dipendenti non si spengono;
- tutte le sorgenti considerate insieme devono avere la stessa frequenza.

La trasformazione Thévenin–Norton conserva la relazione ai morsetti:

Formula fondamentale

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{V}_{Th}}{Z_{Th}}, \quad \underline{V}_{Th} = Z_{Th} \underline{I}_N, \quad Z_N = Z_{Th}.$$



11 Thévenin in AC: stessa struttura, pendenza complessa

Alla frequenza ω_0 fissata, una rete lineare RLC vista da due morsetti può essere sostituita da un generatore fasoriale in serie a un'impedenza:

Formula fondamentale

$$\underline{V} = \underline{V}_{Th} - Z_{Th} \underline{I}.$$

Il confronto con la DC è diretto:

$$V = V_{Th} - R_{Th} I \quad \longrightarrow \quad \underline{V} = \underline{V}_{Th} - Z_{Th} \underline{I}.$$

$\underline{V}_{Th}$ è l'offset fasoriale. $-Z_{Th}$ è la pendenza complessa: moltiplica il modulo e aggiunge un offset di fase. La relazione resta affine, ora nel piano complesso.

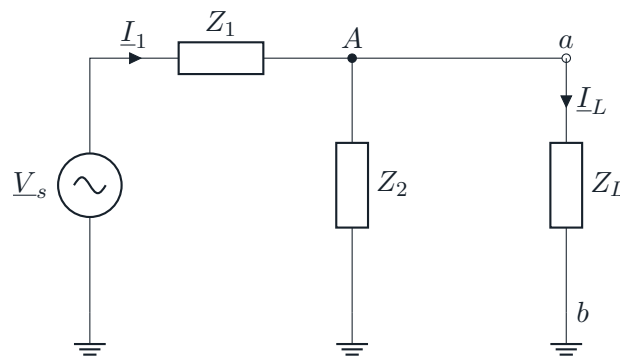
11.1 Procedura completa

1. rimuovere il carico e identificare i morsetti;
2. calcolare la tensione a vuoto $\underline{V}_{oc}$: questa è $\underline{V}_{Th}$;
3. spegnere le sorgenti indipendenti;
4. calcolare l'impedenza vista dai morsetti: questa è Z_{Th} ;
5. se esistono sorgenti dipendenti, applicare una sorgente di prova e usare $Z_{Th} = \underline{V}_{prova}/\underline{I}_{prova}$;
6. disegnare l'equivalente, ricollegare il carico e risolvere;
7. verificare il risultato sul circuito originale.

12 Esercizio completo: circuito originale, Thévenin e Norton

Alla frequenza assegnata le impedenze sono già state calcolate:

$$\underline{V}_s = 12\angle 0^\circ \text{ V}, \quad Z_1 = 4 + j3 \Omega, \quad Z_2 = 6 - j2 \Omega, \\ Z_L = 5 - j1 \Omega.$$



12.1 1. Tensione di Thévenin

Rimuoviamo Z_L . Con i morsetti aperti non esce corrente verso il carico; Z_1 e Z_2 sono in serie. La tensione a vuoto è la tensione su Z_2 :

$$\underline{V}_{Th} = \underline{V}_s \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Sommiamo prima il denominatore:

$$Z_1 + Z_2 = (4 + j3) + (6 - j2) = 10 + j1.$$

Per eseguire la divisione in cartesiana usiamo il coniugato:

$$\frac{6 - j2}{10 + j1} = \frac{(6 - j2)(10 - j1)}{(10 + j1)(10 - j1)} = \frac{58 - j26}{101}.$$

$$\underline{V}_{Th} = 12(0,5743 - j0,2574) = 6,891 - j3,089 \text{ V},$$

$$\boxed{\underline{V}_{Th} = 7,552\angle(-24,15^\circ) \text{ V}}.$$

12.2 2. Impedenza di Thévenin

Spegliamo il generatore ideale di tensione sostituendolo con un cortocircuito. Guardando dai morsetti, Z_1 e Z_2 sono in parallelo:

$$Z_{Th} = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

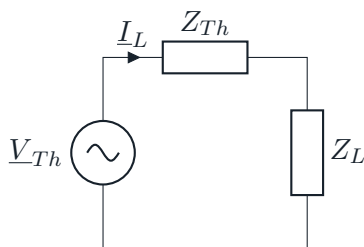
$$Z_1 Z_2 = (4 + j3)(6 - j2) = 30 + j10.$$

$$Z_{Th} = \frac{30 + j10}{10 + j1} = \frac{(30 + j10)(10 - j1)}{101} = \frac{310 + j70}{101},$$

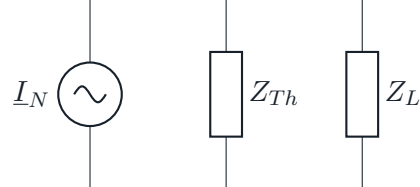
$$\boxed{Z_{Th} = 3,069 + j0,693 \Omega = 3,146 \angle 12,73^\circ \Omega}.$$

12.3 3. Circuiti equivalenti prima di ricollegare il carico

Thévenin con il carico



Norton con il carico



12.4 4. Corrente e tensione sul carico con Thévenin

Le due impedenze sono in serie:

$$Z_{tot} = Z_{Th} + Z_L = (3,069 + j0,693) + (5 - j1) = 8,069 - j0,307 \Omega.$$

$$Z_{tot} = 8,075 \angle (-2,18^\circ) \Omega.$$

$$\underline{I}_L = \frac{V_{Th}}{Z_{tot}} = \frac{7,552 \angle (-24,15^\circ)}{8,075 \angle (-2,18^\circ)} = \boxed{0,935 \angle (-21,97^\circ) \text{ A}}.$$

Poiché $Z_L = 5,099 \angle (-11,31^\circ) \Omega$:

$$\underline{V}_L = Z_L \underline{I}_L = \boxed{4,77 \angle (-33,28^\circ) \text{ V}}.$$

12.5 5. Equivalente di Norton

$$\underline{I}_N = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}} = \frac{7,552 \angle (-24,15^\circ)}{3,146 \angle 12,73^\circ} = \boxed{2,40 \angle (-36,88^\circ) \text{ A}}.$$

In cartesiana:

$$\boxed{\underline{I}_N = 1,92 - j1,44 \text{ A}}.$$

12.6 6. Verifica diretta con il metodo dei nodi

Definiamo le correnti sul circuito originale:

$$\underline{I}_1 = \frac{V_s - V_A}{Z_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{V_A}{Z_2}, \quad \underline{I}_L = \frac{V_A}{Z_L}.$$

KCL al nodo A:

$$\boxed{\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_L}.$$

Sostituiamo solo ora:

$$\frac{12 - \underline{V}_A}{4 + j3} = \frac{\underline{V}_A}{6 - j2} + \frac{\underline{V}_A}{5 - j1}.$$

Portiamo il termine con la sorgente a sinistra:

$$\frac{12}{4 + j3} = \underline{V}_A \left(\frac{1}{4 + j3} + \frac{1}{6 - j2} + \frac{1}{5 - j1} \right).$$

Calcoliamo i termini:

$$\begin{aligned} \frac{12}{4 + j3} &= 1,92 - j1,44, \\ \frac{1}{4 + j3} &= 0,16 - j0,12, \\ \frac{1}{6 - j2} &= 0,15 + j0,05, \quad \frac{1}{5 - j1} = 0,1923 + j0,0385. \\ \underline{V}_A &= \frac{1,92 - j1,44}{0,5023 - j0,0315} = 3,99 - j2,62 \text{ V}, \\ \underline{V}_A &= 4,77 \angle (-33,3^\circ) \text{ V}, \end{aligned}$$

uguale al risultato ottenuto con Thévenin.

13 Massimo trasferimento di potenza in AC

Se $Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$, la potenza attiva media sul carico è massima quando il carico annulla la parte reattiva e uguaglia la parte resistiva:

Formula fondamentale

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_{Th}^* = R_{Th} - jX_{Th}.$$

Non basta porre $Z_L = Z_{Th}$: le parti reattive si sommerebbero invece di cancellarsi.

14 Mappa finale: che cosa resta uguale dalla DC all'AC

Struttura	DC	AC sinusoidale a ω_0
Ohm	$V = RI$	$\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$
KCL	$\sum I_k = 0$	$\sum \underline{I}_k = 0$
KVL	$\sum V_k = 0$	$\sum \underline{V}_k = 0$
serie/parallelo	operazioni su R	operazioni su Z
partitori	rapporti di R	rapporti di Z
sovrapposizione	contributi reali	contributi fasoriali
Thévenin	V_{Th}, R_{Th}	$\underline{V}_{Th}, \underline{Z}_{Th}$
Norton	$I_N = V_{Th}/R_{Th}$	$\underline{I}_N = \underline{V}_{Th}/\underline{Z}_{Th}$

Conclusione

I fasori non inventano nuove leggi circuitali. A frequenza fissata rimuovono la rotazione temporale comune e conservano modulo e fase relativa. Ogni componente lineare diventa un'impedenza complessa; per questo le strutture di Ohm, Kirchhoff, partitori, sovrapposizione, Thévenin e Norton restano valide.